Конспект занятия, посвященного разбору одной из типовых задач по математике на позицию 1

Подготовка к очному туру олимпиады «Все дороги ведут в МАДИ»

Задача

На графике функции $\boldsymbol{y} = \frac{x-2}{x-4}$ найдите абсциссы всех точек, в которых касательная к этому графику перпендикулярна прямой $\boldsymbol{y} = \frac{x}{2} + 7$.

В ответ запишите сумму абсцисс полученных точек.

Необходимые сведения

Для решения этой задачи необходимо повторить несколько тем из школьного курса «Алгебра и начала анализа»:

1. Уравнение прямой на плоскости.
2. Условие перпендикулярности прямых, заданных уравнениями на плоскости.
3. Вычисление производной функции.
4. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

Решение

1. <u>Прямая линия на плоскости XOY может быть задана **уравнением**</u>

$y = kx + b$, где k – «угловой коэффициент», b – «свободный член».

Угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой по отношению к положительному направлению оси абсцисс Ox. Свободный член b равен ординате точки пересечения прямой с осью ординат Oy. Например, для заданной в условии задачи прямой **угловой коэффициент** $k = 1/2$.

2. <u>Условие **перпендикулярности** прямых, заданных уравнениями</u>:

$y = kx + b$ и $y = ax + d$ состоит в том, что произведение их угловых коэффициентов равно -1 (то есть $k \cdot a = -1$). Для выполнения этого условия угловой коэффициент касательной $a = -2$.

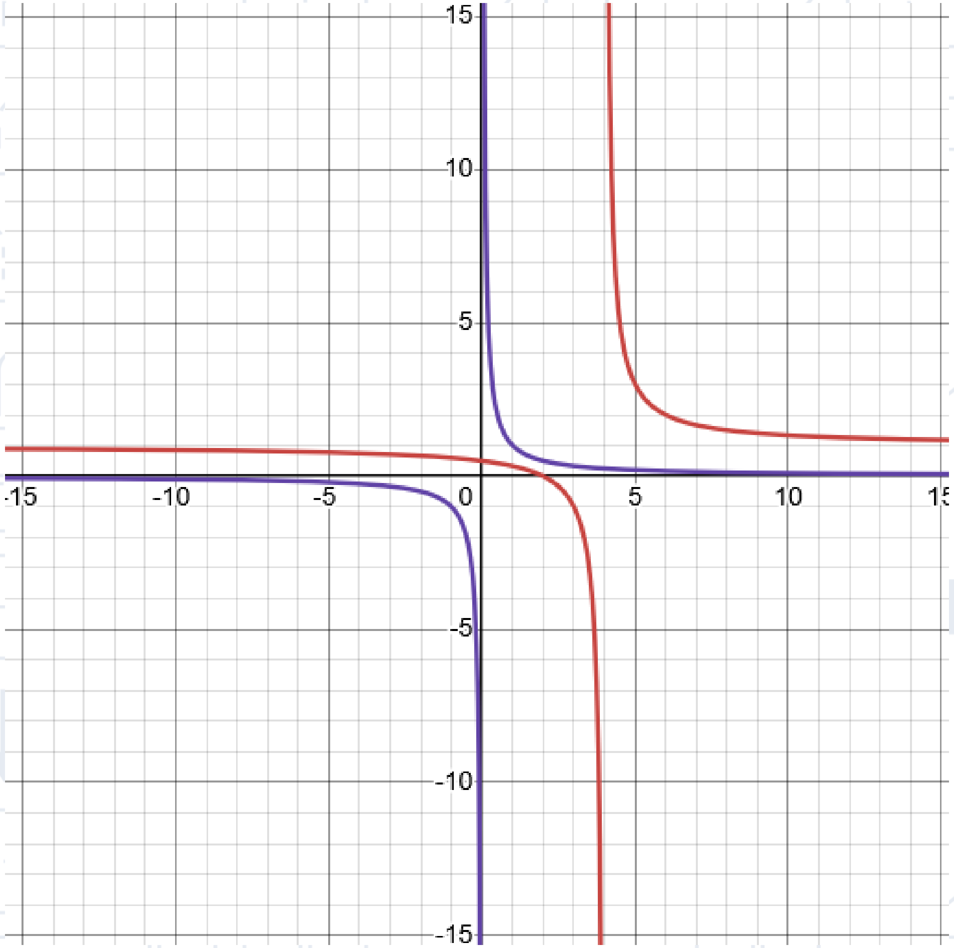
3. <u>Вычисление **производной** функции</u>

Для удобства вычисления производной преобразуем дробь: $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x-4+2}{x-4} = 1 + \frac{2}{x-4}$.

Вычислим производную $y' = 0 + \left(\frac{2}{x-4}\right)' = -2/(x-4)^2$.

Отвлечемся от решения задачи и рассмотрим ещё одно полезное применение сделанного преобразования – построение графика функции. Речь идет о **построении графиков с помощью сдвига.**

Мы видим два эскиза графиков.
Красным цветом выделен график функции, заданной в условии задачи $y = \frac{x-2}{x-4}$, а синим цветом выделен график $y = 2/x$.
Красный график получен из синего путем сдвига на одну единицу вверх вдоль оси Оу и на 4 единицы вправо вдоль оси Ох.



Решение

4. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

Правило. Угловой коэффициент a касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_o, равен значению производной этой функции $a = f'(x_o)$ в точке x_o.

Уравнение касательной $y = a(x - x_o) + d$, где $a = f'(x_o)$, $d = f(x_o)$.

Так как по условию касательная должна быть перпендикулярна заданной прямой, то произведение их угловых коэффициентов равно -1: $f'(x) \cdot ½ = -1$.

Подставим значение производной, найденное в п. 2, $-2/(x-4)^2 = -2$.

Отсюда получаем $(x-4)^2 = 1$. Решая квадратное уравнение, получаем два значения x: 3 *и* 5. В ответ по условию надо записать сумму этих чисел.

ОТВЕТ: 8.

Проиллюстрируем ответ графиками.

Изображены две ветви гиперболы, заданной условием задачи, (красный цвет) и две параллельные между собой касательные к этим ветвям (y=-2x+13 – синий цвет, y=-2x+5 – зеленый цвет), каждая из которых перпендикулярна прямой заданной условием (голубой цвет).